Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2014 S-2DM ex ret

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Onsdag den 18. juni 2014

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betragter vi tredjegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^3 + (1 - a - a^2)z^2 + (a^3 - a^2 - a)z + a^3.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} - 5\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 8x = 0,$$

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} - 5\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 8x = 30e^{-t}$$

og

$$(***) \qquad \frac{d^4y}{dt^4} - 5\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} = 0.$$

(1) Vis, at udsagnet

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = (z - a)(z - a^2)(z + 1)$$

er opfyldt.

Løsning. Ved udgangning af parenteserne fås resultatet, så ligningen

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : (z-a)(z-a^2)(z+1) = z^3 + (1-a-a^2)z^2 + (a^3-a^2-a)z + a^3$$

er opfyldt.

(2) Bestem samtlige rødder i polynomiet P, og angiv roddernes multipliciteter.

Løsning. Af resultatet ovenfor ser vi, at polynomiet P har rødderne a, a^2 og -1.

Hvis $a = -1$, har polynomiet P rødderne -1 og 1 med multipliciteterne henholdsvis 2 og 1.

Hvis $a = 1$, har polynomiet P rødderne -1 og 1 med multipliciteterne henholdsvis 1 og 2.

Hvis $a = 0$, har polynomiet P rødderne -1 og 0 med multipliciteterne henholdsvis 1 og 2.

Hvis $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, har polynomiet P de tre forskellige rødder a, a^2 og -1, der hver har multipliciteten 1.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Det karakteristiske polynomium for differentialligningen $(*)$ er polynomiet P, hvor $a = 2$. De karakteristiske rødder er derfor $-1, 2$ og 4. Dette betyder så, at den fuldstændige løsning til $(*)$ er

$$x = x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

(4) Godtgør, at differentialligningen $(*)$ ikke er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Da to af de karakteristiske rødder er positive, er differentialligningen $(*)$ ikke globalt asymptotiske stabil.

(5) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Vi gætter på en speciel løsning af formen $\hat{x} = \hat{x}(t) = Ate^{-t}$, og vi finder, at $A = 2$, så den fuldstændige løsning til $(**)$ er

$$x = x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} + 2te^{-t}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

(6) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(***)$.

Løsning. Det karakteristiske polynomium $Q = Q(z), z \in \mathbf{C}$, for differentialligningen $(***)$ er $Q(z) = zP(z)$, hvor $a = 2$. De karakteristiske rødder er derfor $-1, 2, 4$ og 0, og dermed er den fuldstændige løsning til $(***)$ givet ved udtrykket

$$x = x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} + c_4, \ \text{ hvor } \ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

Opgave 2. Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{11}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{11}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningen

$$(\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}.$$

(1) Vis, at vektorerne $a = (1, -1, 0), b = (1, 1, 2)$ og $c = (-1, -1, 1)$ er egenvektorer for matricen A, og angiv de tilhørende egenværdier.

Løsning. Ved udregning finder vi, at $Aa = -a, Ab = -2b$ og $Ac = -3c$. Dette viser, at vektorerne a, b og c er egenvektorer for matricen A med egenværdierne henholdsvis $-1, -2$ og -3.

(2) Bestem den fuldstændige løsning for vektordifferentialligningen $(\S)$.

Løsning. Vi finder, at

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

(3) Afgør, om vektordifferentialligningen $(\S)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Vektordifferentialligningen $(\S)$ er globalt asymptotisk stabil, idet alle egenværdierne for matricen A er negative.

(4) Bestem den specielle løsning $\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{z}}(t)$ til vektordifferentialligningen $(\S)$, så betingelsen $\tilde{\mathbf{z}}(0) = (1, -1, 3)$ er opfyldt.

Løsning. Vi finder, at

$$\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{z}}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

idet $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.

Opgave 3. For ethvert $r > 0$ betragter vi mængden

$$K(r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r \ \vee \ |z| = r^2\}$$

(1) Begrund, at mængden $K(r)$ er kompakt for ethvert $r > 0$.

Løsning. Det er klart, at mængderne

$$K_1(r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r\} \ \text{ og } \ K_2(r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = r^2\}$$

er kompakte (afsluttede og begrænsede) for ethvert $r > 0$, og heraf følger det umiddelbart, at også $K(r)$ er kompakt for ethvert $r > 0$.

(2) Bestem tallet $r > 0$, så $K(r) = K(r^2)$.

Løsning. Vi ser, at $K(r) = K(r^2)$, hvis og kun hvis $r = 1$.

(3) Bestem fællesmængden

$$\bigcap_{r>0} K(r).$$

Løsning. Vi finder, at

$$\bigcap_{r>0} K(r) = \{0\}.$$

(4) Bestem $r > 0$, så mængden $K(r)$ er konveks.

Løsning. Hvis $K(r)$ skal være konveks, må vi kræve, at $r^2 \leq r$, så $r \in \,]0, 1]$.

Lad (z_k) være en følge af komplekse tal, og antag, at kravet

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : z_k \neq 0$$

er opfyldt.

(5) Vis, at følgen (t_k), som opfylder betingelsen

$$\forall k \in \mathbf{N} : t_k = \frac{z_k}{|z_k|},$$

har en konvergent delfølge (t_{k_p}) med grænsepunkt i $t \in \mathbf{T}$. (Man skal altså vise, at $|t| = 1$.)

Løsning. Følgen (t_k) er en følge på den kompakte mængde $\mathbf{T}$. Heraf følger påstanden straks.

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(x^2 + 2x + \dot{x} + \dot{x}^2\right) dt = \int_0^1 \left(x^2 + 2x + \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) dt$$

og den funktion $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : F(x, y) = x^2 + 2x + y + y^2.$$

(1) Vis, at funktionen F er strengt konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2 \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 1,$$

så funktionen $F = F(x, y)$ har Hessematricen

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

som er positiv definit. Da er f en strengt konveks funktion.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, der minimerer integralet $I(x)$, idet betingelserne $x^*(0) = -1$ og $x^*(1) = 2$ er opfyldt.

Løsning. Eulers differentialligning for dette variationsproblem, som åbenbart er et minimumsproblem, er

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} - x = 1,$$

hvoraf vi får, at

$$x = x(t) = Ae^t + Be^{-t} - 1.$$

Idet betingelserne $x^*(0) = -1$ og $x^*(1) = 2$ skal være opfyldt, finder vi, at

$$x^* = x^*(t) = \frac{3}{e - e^{-1}}\left(e^t - e^{-t}\right) - 1 = \frac{3e}{e^2 - 1}\left(e^t - e^{-t}\right) - 1.$$